c) Den gleichen Betrag finden J. Larmor und A. E. H. Love auch für die Spannungserhöhung durch einen nahe der Oberfläche liegenden kleinen Kugelhohlraum in einem gedrillten Stabe[1]).

d) Für dünnwandige Hohlkörper erhält man durch Einführung eines (über jeden senkrecht zum Rand geführten Schnitt) konstanten Mittelwertes der Schubspannung eine in vielen Fällen ausreichende Näherungslösung[2]). 143

KURZE AUSZÜGE

Mathematische Statistik.

Statistische Reihen. Eine Arbeit von Czuber (Über die Beurteilung statistischer Reihen auf ihren Zufallscharakter, Skandinavisk Aktuarietidskrift 1921, p. 65—96) stellt, wie eingangs betont wird, im wesentlichen eine Paraphrase zu v. Bortkiewicz's, Iterationen, Tschuproffs Arbeit über Stabilität der statistischen Reihe und eine Kritik einer Arbeit von Esscher über die Stabilitäts- und Korrelationsverhältnisse in der Sterblichkeit der schwedischen Bevölkerung 1886—1914 dar. Zunächst wird ein Calcul für die mathematische Erwartung aufgestellt. Die mathematische Erwartung einer Summe von zufälligen Größen ist gleich der Summe der mathematischen Erwartungen der Einzelgrößen. Dies gilt, gleichgültig, ob die Größen unabhängig sind oder nicht. Dagegen gilt der entsprechende Satz für die Multiplikation nur für unabhängige Größen. Der Vergleich zwischen dem Erwartungswert und dem empirisch gewonnenen Beobachtungswert gibt ein Maß dafür, inwieweit die betrachtete Materie sich den Zufallsgesetzen fügt. Dies führt zur Aufstellung des Divergenzkoeffizienten

$$Q^2 = \frac{\sum\limits_{1}^{n} (x_\lambda - p s)^2}{n p q s},$$

wobei x_λ die Zahl der Wiederholungen des günstigen Ergebnisses in einer Reihe mit s Versuchen, $p = 1 - q$ die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit und n die Zahl der Reihen bedeutet.

Der Unterschied der vorliegenden Darstellung gegenüber der von Lexis besteht darin, daß Lexis mit den relativen Häufigkeiten und mit empirisch bestimmten Wahrscheinlichkeiten rechnete. Der Gebrauch des Koeffizienten wird an einer Lotterieziehung illustriert. Es ergibt sich ein deutlicher Zufallscharakter. Dagegen führt eine Analyse der Würfelresultate von Wolf zu dem Schluß, daß ein systematischer Fehler in den Würfeln vorhanden sein muß. Der Begriff des Divergenzkoeffizienten wird dann entsprechend dem Poissonschen Schema für den Fall einer variierenden Grundwahrscheinlichkeit erweitert, was dazu führt, daß die Größen p, q, s einen Index bekommen. Dann wird der mittlere Fehler dieses Koeffizienten abgeleitet.

Etwas anders hat Tschuproff den Divergenz-Koeffizienten definiert. An einer Variabeln werden r Serien von je n Versuchen vorgenommen. Der Mittelwert der $i$ten Serie heiße x_{in}, der aus allen Beobachtungen x_{rn} ein beliebiges Resultat x_ν so ist

$$Q^2 = \frac{\frac{n}{r-1} \sum\limits_{1}^{n} (x_{i,n} - x_{r,n})^2}{\frac{1}{rn-1} \sum\limits_{1}^{nr} (x_\nu - x_{r,n})^2} \cdot ..$$

Beide Definitionen stimmen um so genauer überein, je größer r. Dies wird durch eine längere algebraische Umformung gezeigt. Als Beispiel wird dann das Sterben in einer einjähigen Altersklasse während N Beobachtungsjahren von s unter Beobachtung stehenden Personen betrachtet. Hierfür wird die mathematische Erwartung des Quadrates der zufälligen Abweichung berechnet. Bezeichnet man mit ε_k die Totalabweichung einer Einzelbeobachtung sowohl herrührend von den zufälligen Störungen als von den Schwankungen der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeit, so ergibt sich

$$\frac{1}{N} \mathfrak{E}(\Sigma \varepsilon^2) = \frac{p q}{s} + \frac{s-1}{s} \frac{\Sigma (p_k - p)^2}{N},$$

während sich bei Esscher eine falche Formel findet

Neuordnung der mathematischen Statistik. *Unter diesem Titel zieht* E. Blaschke (in der Skandinavisk Aktuarietidskrift p. 97 bis 133) aus der Kritik, die v. Mises an den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung geübt hat, die für die mathematische Statistik notwendigen Konsequenzen. Der Endzweck der statistischen Forschung ist die Aufstellung von leicht handbaren Maßzahlen. Blaschke engt die Bedeutung der Wahrscheinlichkeits-

[1]) J. Larmor, The Influence of Flaws and Air-Cavities on the Strength of Materials. — A. E. Love, Analysis for Spherical Cavity, Phil. Mag. (Ser. 5 vol. 33, 1892) und Love, Theorie der Elastizität, S. 367.

[2]) A. und L. Föppl, Drang und Zwang, München 1920, II. Bd., S. 160.

theorie für die mathematische Statistik stark ein. Für die Bevölkerungsstatistik wird die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie im Wesentlichen verneint. Denn ihre Ergebnisse sind nicht Versuche mit konstanter Grundwahrscheinlichkeit, weil die Bevölkerung den bewußten Eingriffen der Gesellschaft unterliegt. Auch gibt es hier keine wiederholte Beobachtung desselben Gegenstandes. Bejaht wird die Wahrscheinlichkeitstheorie für die Versicherungsstatistik, da bei der Auswahl die Regellosigkeit erhalten ist. Immerhin ist auch diese Erwartungsbildung wegen des engen Zusammenhangs des beobachteten Materials mit der Bevölkerungsstatistik nur bedingt. Der Vorzug der Versicherungsstatistik beruht vor allem auf dem Mangel an systematischen Fehlern. Blaschke warnt vor einer Überschätzung des Lexisschen Dispersions-Kriteriums. Dieses gilt an sich für mathematische Wahrscheinlichkeiten. Gegen die Argumente, die aus der normalen Dispersion auf eine den betr. Ereignissen zugrunde liegende mathematische Wahrscheinlichkeit schließen wollen, konstruiert Blaschke 4 Fälle, wo das Kriterium von Lexis versagt. Den größten Erfolg hat die Wahrscheinlichkeitstheorie auf dem Gebiet der »von einer Ursache abhängigen statistischen Gesetze«, worunter Blaschke die Häufigkeitskurven versteht. Die dabei auftretenden Konstanten Präcisionsmaß, Medianwert, Mittelwert bedürfen keiner wahrscheinlichkeitstheoretischen Begründung, so daß die Lehre von den Frequenzkurven durch eine andere Auffassung über die Wahrscheinlichkeitstheorie nicht beeinflußt wird. Das gleiche gilt für Korrelations- und Ausgleichungstheorie. Die Heranziehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Verwandlung eines korrelativen in einen korrelationsfreien Zusammenhang, hat nur methodische Bedeutung. Natürlich sagt eine Korrelation nichts über den ursächlichen Zusammenhang aus. Die Ausgleichungstheorie wird durch die neueren Arbeiten über Kollektivlehre bereichert. Für die amtliche Statistik wünscht Blaschke, daß neben den Beobachtungswerten von nun an auch die mittleren und wahrscheinlichen Fehler publiziert werden.

Zum Vererbungsproblem. Paart man in einer zweigeschlechtlichen Anfangsgeneration mit den Eigenschaften a und $a+1$, deren Häufigkeiten p und q seien, jedes weibliche Organ mit jedem männlichen (also auch innerhalb desselben Individuums), und schreibt man einem Bastard das arithmetische Mittel der Eigenschaften der Eltern zu, so hat die Eigenschaft $a+\frac{\nu}{n}$ in der $m$ten Generation die Häufigkeit

$$\binom{n}{\nu} p^{n-\nu} q^{\nu}, \quad \text{wobei } n = 2^m$$

Bei Mendel kommen nur die Nuancen a, $a+{}^1/_2$ und $a+1$ vor. Haben sie die Häufigkeiten p, r, q, so bleibt nach einem Satz von Hardy die Zusammensetzung der Population bei der obigen Paarungsmethode konstant. Davon ausgehend zeigt Herr K. G. Hagström (Ein erblichkeitstheoretisches Grenzproblem, Svenska Aktuarieföreninges Tidskrift, 1917, p. 164—176), daß auch eine Verteilung einer Generation auf n Klassen konstant ist, wenn deren Häufigkeiten den Termen der Entwicklung von $(p+q)^n$ proportional sind.

Fehlertheorie. Herr K. G. Hagström deutet in seinen »Bemerkungen zur Theorie der Beobachtungsfehler« (Svenska Aktuarieföreningens Tidskrift 1917, p. 67—70), die der Entwicklung der Fehlerfunktion zugrunde liegenden n Messungen als Punkt x in einen n dimensionalen Raum. Dann entspricht dem Wertsystem der Fehler ein variabler Punkt der auf einer Geraden durch x liegt. Ebenso wird die Ableitung des Gaussschen Fehlergesetzes mit Hilfe der Annahme des arithmetischen Mittels als wahrscheinlichster Wert geometrisch gedeutet.

Kritik der Korrelationstheorie. Die mathematische Statistik ist die Wissenschaft gewisser Schemata, welche den Phänomenen entsprechen sollen, die die praktische Statistik behandelt. Diese Schemata, vor allem das Urnenschema sind zu allgemein und zu abstrakt. Man sollte Schemata aufstellen, die gut passen, wie die Potentialtheorie für die theoretische Physik. Von diesem Standpunkt untersucht K. G. Hagström in zwei Arbeiten (»Der Begriff der statistischen Funktion« und »Bemerkungen zur Theorie der statistischen Funktion« Skandinavisk Aktuaretidskrift, 1919, p. 1—52 und 204—223) die Korrelationstheorie und greift sie außerordentlich stark an. Zunächst betrachtet er die älteren Arbeiten von Bravais und Galton. Er bezeichnet als Korrelationsfunktion eine positive Funktion $F(x, y)$, für die $\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} F(x, y)\,dx\,dy$ die Wahrscheinlichkeit angibt, daß x in das Intervall $a_1 a_2$ und y in das Intervall $b_1 b_2$ fällt. Von den dabei interessierenden Verteilungsfunktionen für die beiden Variabeln wird die in kleinen Intervallen konstante Funktion und die Gaußsche Fehlerfunktion betrachtet. Hat man zwei Variable x und y, welche von einer dritten Variablen τ derart abhängen, daß $F(x, \tau)$, $F(y, \tau)$ und die Verteilungsfunktion für τ Gaußsche Kurven sind, so läßt sich $F(x, y)$ auf die Form bringen

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}{\pi}\, e^{-(\alpha x^2 - 2\beta x y + \gamma y^2)}$$

(normale Korrelationsfunktion). Die Äquiprobabilitätskurven sind Ellipsen. Der Korrelationskoeffizient wird definiert durch

$$r = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xy\, F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 F(x,y)\,dx\,dy \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 F(x,y)\,dx\,dy}}$$

und wird zu $r = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha \gamma}}$. Dann werden die Beziehungen zwischen den in $F(x, y)$, $F(x\,\tau)$, $F(y\,\tau)$ und der Verteilungsfunktion von τ auftretenden Konstanten gezeigt. Als speziellen Grenzfall bekommt man den Bravaisschen Fall, wenn nämlich $x = \Sigma\, \mu_r\, \tau_r$. Um eine Beobachtung nach diesem Schema zu untersuchen, muß man also die Annahme machen, daß die Korrelationsfunktion normal ist und daß x und y mit der Veränderlichen τ einen Zusammenhang von der oben geschilderten Art aufweisen. Beides sind ganz spezielle Hypothesen.

Auch der Fall

$$F(x, \tau) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 (x - \Sigma\, \mu_i\, \tau_i)^2}$$

$$F(y, \tau) = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\, e^{-k^2 (y - \Sigma\, \nu_i\, \tau_i)^2}$$

$$F(\tau_i) = \frac{c_2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-c_i^2\, \tau_i^2}$$

führt auf den Normalfall.

Der Verfasser polemisiert dann gegen die englische Schule, da ihr angeblich folgende falsche Sätze zugrunde liegen:

1. Wenn $r = 0$, so sind x und y unabhängig.

2. Wenn $r = 1$, so sind x und y einander proportional. Bei Pearson finden sich diese Sätze nicht. Bei Yule und Charlier findet sich Satz 2. Bezeichnet man die Tatsache, daß die Korrelationsfunktion $F(x\,y)$ zerlegbar ist in $p(x) \cdot q(y)$ als Unabhängigkeit im gewöhnlichen Sinne, so zeigt der Autor die Unrichtigkeit einer Reihe von Sätzen, von welchen man nach dem Studium der Arbeiten der »Korrelationisten« vielleicht glauben könnte, daß sie bewiesen oder beweisbar wären.

Falsch sind folgende Sätze:

Wenn $r = 0$, so sind x und y von einander wenig abhängig, was bedeuten soll, daß $F(x, y)$ nicht vom Streifentypus mit sehr schmalen Streifen sein kann. Darunter ist zu verstehen, daß in der unmittelbaren Umgebung einer Kurve $f(x\,y) = 0$, das $F(x\,y)$ groß, sonst aber verschwindend klein ist. Einen sehr schmalen Streifen deutet man als einen funktionalen Zusammenhang der beobachteten Erscheinungen.

Wenn $r = 0$, so kann $F(x\,y)$ in $p(x) \cdot q(y)$ zerlegt werden.

Auch für den Fall $r = 0$ wäre also tatsächlich ein Zusammenhang möglich. Und umgekehrt **auch im Fall eines endlichen r wäre es** möglich, daß die Korrelationsfunktion vom Streifentypus mit beinahe verschwindender Streifenbreite wäre.

Richtig ist: Wenn x und y im gewöhnlichen Sinne voneinander unabhängig sind, so ist $r = 0$. Die richtige Umkehrung lautet: Wenn $r \neq 0$, so sind x und y nicht im gewöhnlichen Sinne von einander unabhängig. Ferner ist stets $|r| < 1$. Die Korrelationstheorie reduziert sich also auf folgendes: 2 unabhängige Veränderliche erzeugen eine normale Korrelationsfunktion mit $r = 0$; findet man, daß $F(x, y)$ nicht vom normalen Typus oder vom normalen Typus mit $r \neq 0$, so ist ein Zusammenhang zu vermuten.

Stabilität und Korrelation von statistischen Reihen. Die Stabilität der Sterblichkeit in den verschiedenen Altersstufen wurde bisher hauptsächlich an versicherungsstatistischem Material untersucht. Es ergab sich in den meisten Altersstufen sehr große Stabilität. In den Meddelanden fran Lunds Astronomiska Observatorium, Serie II untersucht Fredrik Esscher die Sterblichkeit der Gesamtbevölkerung in Schweden 1886—1914. Er kommt dabei zu ähnlichen Ergebnissen wie eine früher von Peek angestellte Untersuchung über die Sterblichkeit in den Niederlanden. Zunächst wird im Sinne der Dispersionstheorie als Maß für die Wirkung der störenden Kräfte das Quadrat des Divergenz-Koeffizienten verwendet, das richtig

$$Q^2 = 1 + \frac{(s-1)\,\eta_2}{p\,q}$$

lautet. Dabei bedeutet s die Zahl der beobachteten Personen, p den Durchschnitt der in N Versuchsreihen auftretenden Grund-Sterbewahrscheinlichkeiten, η_2 das Quadrat des mittleren Fehlers der Grundwahrscheinlichkeiten. Daneben wird als Stabilitätsmaß auch das Hundertfache des Störungskoeffizienten ρ gebraucht. Er drückt die Schwankungen der Serienwahrscheinlichkeiten in Prozenten der Grundwahrscheinlichkeit aus, so daß

$$100\,\rho = \frac{100\,\sqrt{\eta_2}}{p}$$

(v. Bortkiewicz's relative wesentliche Schwankungskomponente).

Der Untersuchung liegt die Sterbenswahrscheinlichkeit in Schweden 1886—1914 getrennt nach dem Geschlecht für je fünfjährige Altersklassen zugrunde. Die beobachteten Sterbenswahrscheinlichkeiten wurden zunächst mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate durch Parabeln ausgeglichen, was Escher als „Elimination der säkularen Variation" bezeichnet. Hierbei wird ein originelles Verfahren angegeben, derart, daß das Hinzufügen eines neuen Gliedes an den bereits bestimmten Koeffizienten nichts ändert. Wenn man also sieht, daß eine vorgenommene Ausgleichung nicht genügt, so kann man nachher unter Beibehaltung der berechneten Koeffizienten neue Glieder berücksichtigen. Dann wird die Dispersion der ausgeglichenen Reihe auf die Bernoullische Dispersion und die Verbreitung der Grundwahrscheinlichkeit um die ausgeglichene Kurve zurückgeführt. Es genügt für die ganze Zeitspanne eine Parabel zweiten Grades, für die Teilperioden (bis 1900 und nach 1900) je eine einfache Gerade. Die Abnahme der Sterbenswahrscheinlichkeit war am stärksten für die Kinderjahre. Die Dispersionen sind für alle Altersgruppen übernormal. Wie aus den ρ-Wertes hervorgeht, ist die Stabilität am niedrigsten bei den Jugendlichen, in den meisten Altersgruppen hat sie in der zweiten Hälfte der beobachteten Zeit zugenommen. Zwischen Stabilität und Korrrelation zweier Reihen besteht ein enger Zusammenhang. Es ist ein besonderes Verdienst der Esscherschen Arbeit, daß sie durch eine eingehende Korrelationsuntersuchung die Stabilitätsuntersuchung ergänzt.

Die Schwankungen machen es wahrscheinlich, daß die Sterbenswahrscheinlichkeiten durch äußere Faktoren beeinflußt wurden. Durch eine Korrelationsuntersuchung wurde nun ermittelt, inwieweit diese Faktoren den verschiedenen Altersgruppen gemeinsam waren. Der aufgestellte Koeffizient ist analog mit Bortkiewicz's Syndromiekoeffizient, berücksichtigt jedoch die verschiedenen Beobachtungszahlen der Reihen nicht. Unterscheidet man fünfjährige Altersgruppen und drei Zeitgruppen, so sieht man aus dem Vergleich mit den möglichen Maximalwerten, daß die Faktoren, die den Verlauf der Sterblichkeit beeinflußten, zum größten Teil den verschiedenen Altersstufen einer Gruppe gemeinsam sind. Auch zwischen den Sterblichkeitsziffern der beiden Geschlechter ist eine außerordentlich starke Korrelation vorhanden. Der Korrelationskoeffizient beträgt für die ganze Beobachtungszeit $r = 0{,}972$. Die störenden Kräfte, die die Sterbenswahrscheinlichkeiten in den verschiedenen Altersstufen einer fünfjährigen Gruppe, in entsprechenden männlichen und weiblichen fünfjährigen Gruppen und in naheliegenden Gruppen desselben Geschlechts beeinflussen, hängen durch starke positive Korrelation zusammen, ebenso die störenden Kräfte innerhalb weit voneinander entfernter Altersstufen.

Berlin. E. I. Gumbel. 165

KLEINE MITTEILUNGEN

Das Schaukelpendel. Wenn eine Schaukel ohne äußeren Anstoß in Betrieb gehalten oder gesetzt werden soll, so muß die auf der Schaukel befindliche Person, wie man aus der Erfahrung weiß, ihren Schwerpunkt in einer (oder wirkungsvoller in beiden) Endlagen senken und beim Durchgehen durch die Mittellage heben. Faßt man die Schaukel samt Schaukler als ein Pendel auf, dessen Drehpunkt mit dem Aufhängepunkt der Schaukel zusammenfällt, so kann man auch sagen, die Energie der Pendelbewegung werde durch die Bewegungen des Schauklers relativ zur Schaukel in dem eben angegebenen Sinne ständig vermehrt.

Über die Art des Energieübergangs vom Schaukler an das Pendel erhält man Aufschluß, wenn man die Bewegung nach der vereinfachten Annahme der Abb. 1 untersucht:

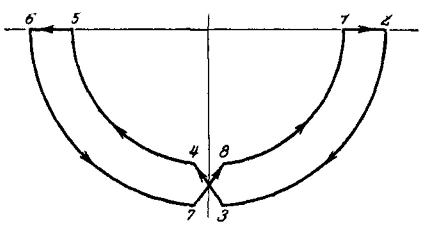

Abb. 1

Man setzt voraus, die Schaukel habe einen Gesamtausschlag von 180° und der Schaukler führe die Senkung seines Schwerpunkt in den Endlagen und die Hebung in der Mittellage so rasch aus, daß die tangentiale Bewegung gegenüber der radialen vernachlässigt werden kann. Der Schwerpunkt durcheilt also nacheinander die Lagen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Wenn man Lager- und Luftreibung vernachlässigt, wird der Anordnung von außen keine Energie zugeführt. Die Energiewanderung ΔE der Pendelbewegung während einer vollen Schwingung ist demnach gleich der Arbeit, die der Schaukler bei seinen Bewegungen leistet. Die Bewegungen von 1 nach 2 und von 5 nach 6 erfolgen ohne Energieumsetzung, da die Bewegung des Schwerpunkts senkrecht zu der einzigen an ihm angreifenden Kraft, der Schwerkraft G, erfolgt. Die Masse m muß allerdings im Punkte 1 (bezw. 5) beschleunigt werden; die dazu aufgewandte Energie wird aber wieder zurückgewonnen bei der nachfolgenden Verzögerung im Punkte 2 (bezw. 7). Die Entfernung zwischen den Punkten 1 und 2 (bezw. 5 und 6) ist mit Δr, der Pendelhalbmesser mit r bezeichnet. Beim Durchgehen durch die Mittellage greifen am Pendel die Schwerkraft G und die Zentrifugalkraft $Z = \frac{mv^2}{r}$ an, die beide der Bewegung von 3 nach 4 bezw. von 7 nach 8 entgegengesetzt gerichtet sind. Da diese Arbeit während einer vollen Pendelschwingung zweimal geleistet wird, ist:

$$\left.\begin{aligned} \Delta E &= 2\,\Delta r\,(G+Z) = 2\,\Delta r\left(mg + \frac{mv^2}{r}\right), \\ &= 2\,\Delta r\,mg\,(1+2) = 6\,\Delta r\,mg \\ &\text{wegen } v = \sqrt{2\,gr} \end{aligned}\right\} \quad (1).$$

Wenn der Pendelausschlag nicht 180° sondern 2α ist (Abb. 2), so ist, wie man sofort übersieht,

$$\left.\begin{aligned} \Delta E &= 2\,\Delta r\,mg\,(1-\cos\alpha) + 2\,\frac{mv^2}{r}\,\Delta r, \\ &\text{wobei } v^2 = 2\,gr\,(1-\cos\alpha), \text{ also} \\ \Delta E &= 2\,\Delta r\,mg\,(1-\cos\alpha)\,(1+2) \\ &= 6\,\Delta r\,mg\,(1-\cos\alpha) \end{aligned}\right\} \quad (2),$$

also auch hier entfällt ein Drittel der gesamten Energieänderung auf die Arbeit gegen die Schwerkraft und zwei Drittel auf